Problème 1 : En pleine effervescence

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x. On a donc $\mathrm{E}(x) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.
Par exemple, $\mathrm{E}(2,4)=2$, $\mathrm{E}(3)=3$ et $\mathrm{E}(1,9)=1$.

On dit qu'un réel x est *pétillant* si $x \geqslant 0$ et si, pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $\mathrm{E}\left(x^{(2^n)}\right)+2$ est le carré d'un entier.

Partie 1 : Mise en jambes

1) Démontrer que le réel $\dfrac{3}{2}$ n'est pas pétillant.
2) Démontrer que l'intervalle $[0\,;1[$ ne contient aucun réel pétillant.
3) a) Démontrer que, si un réel x est pétillant, alors le réel x^2 est aussi pétillant.
   b) Démontrer que, s'il existe un réel pétillant, alors il existe une infinité de réels pétillants.
4) Démontrer qu'aucun entier naturel n'est pétillant.

Dans la suite de ce problème, on considère un entier $k \geqslant 1$ fixé. On souhaite établir que l'intervalle $[k\,;k+1[$ contient un unique réel pétillant. On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$u_1=(k+1)^2$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1}=(u_n-1)^2.$$

Partie 2 : Existence

5) Démontrer que $u_n \geqslant 3$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
6) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un unique réel $a_n \geqslant 1$ tel que $a_n^{(2^n)}+2=u_n$, et un unique réel $b_n \geqslant 1$ tel que $b_n^{(2^n)}+1=u_n$.
7) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
8) Démontrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note α sa limite.
9) Démontrer que $k<\alpha<k+1$ et que α est pétillant.

Partie 3 : Unicité

Soit γ un réel pétillant contenu dans l'intervalle $[k\,;k+1[$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $v_n=\mathrm{E}\left(\gamma^{(2^n)}\right)+2$.

10) Démontrer que $u_n=v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
11) Avec les notations de la partie 2, démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n.$$

12) a) Soit x et y deux réels tels que $x \geqslant y \geqslant 1$.
Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$x^{(2^n)} - y^{(2^n)} \geqslant 2^n(x-y).$$

b) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ convergent toutes les deux vers γ.

13) Démontrer que γ est l'unique réel pétillant contenu dans l'intervalle $[k\,;k+1[$.